Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 20.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Uvod u linearnu algebru**

1. **a)** Dati su skupovi $A = \{a, b\}$ i $B = \{1, 2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su funkcije (preslikavanja)? Koje od napisanih funkcija su bijekcije?

b) Dat je polinom $f(x) = (b - a)x^n + 2^n a - b$, $a, b \in \mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa $x^2 - 3x + 2$ bude $(2^n - 1)x$.

2. Matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je zadana sa

$$M = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 & n-1 \\ -x & x-1 & -1 & ... & -1 & -1 & n-2 \\ 0 & -x & x-1 & ... & -1 & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & x-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -x & x \end{bmatrix}$$

gdje je $x \neq 0$. Izračunati $det(A)$.

3. Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametara a i b:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + ax_5 &= -3 \\ x_1 + 7x_2 + bx_3 + 3x_4 \quad &= -5 \ . \end{aligned}$$

4. Odrediti t tako da matrica $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & t \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3. Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Dati su skupovi $A=\{a,b\}$ i $B=\{1,2\}$. Odrediti sve binarne relacije iz A u B. Koje od napisanih relacija su f-je (preslikavanja)? Koje od napisanih f-ja su bijekcije?

Rj.

$$A\times B=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$$

Binarna relacija je podskup od $A\times B$.

Binarne relacije ću označiti sa $\rho_1, \rho_2, \dots$

Binarne relacije su

$\rho_1=\emptyset$

$\rho_2=\{(a,1)\}$

$\rho_3=\{(a,2)\}$

$\rho_4=\{(b,1)\}$

$\rho_5=\{(b,2)\}$

$\rho_6=\{(a,1),(a,2)\}$

$\rho_7=\{(a,1),(b,1)\}$

$\rho_8=\{(a,1),(b,2)\}$

$\rho_9=\{(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{10}=\{(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{11}=\{(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{12}=\{(a,1),(a,2),(b,1)\}$

$\rho_{13}=\{(a,1),(a,2),(b,2)\}$

$\rho_{14}=\{(a,1),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{15}=\{(a,2),(b,1),(b,2)\}$

$\rho_{16}=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

F-je (preslikavanja) su: $\rho_7, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}$.

Bijekcije su: ρ_8, ρ_9.

Dat je polinom $f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$, $a,b\in\mathbb{C}$. Odrediti a i b tako da ostatak pri djeljenju polinoma $f(x)$ sa x^2-3x+2 bude $(2^n-1)x$.

Rješenje

$f(x)$ je djeljiv sa $x-c$ akko je $f(c)=0$.
Ako $f(x)$ nije djeljiv sa $x-c$ ostatak pri djeljenju $f(x)$ sa ~~$x-c$~~ iznosi $f(c)$.

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b \longrightarrow f(1)=b-a+2^n a-b=2^n a-a=(2^n-1)a$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$f(2)=(b-a)2^n+2^n a-b=b2^n-a2^n+2^n a-b=2^n b-b=(2^n-1)b$$

$$f(x)=(b-a)x^n+2^n a-b$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=(2^n-1)a\\ f(2)&=(2^n-1)b\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

$$f(x)=(x^2-3x+2)g(x)+(2^n-1)x$$

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=2^n-1\\ f(2)&=(2^n-1)\cdot 2\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$ $a=1$, $b=2$

tražene vrijednosti

(#) Matrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ je zadana sa

$$\begin{bmatrix} x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \\ -x & x-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & n-2 \\ 0 & -x & x-1 & \dots & -1 & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & x \end{bmatrix}$$

gdje je $x \neq 0$. Izračunati $\det(A)$.

Rj. Da bi lakše izračunali matricu n-tog reda, prvo izračunajmo matricu 2, 3 i 4 reda.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -x & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{I}_k+\mathrm{II}_k} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ -x & x-1 & 1 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{II}_k+\mathrm{III}_k} \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -x & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{I}_k+\mathrm{II}_k} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & 3 \\ -x & x-1 & -1 & 2 \\ 0 & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{III}_k+\mathrm{IV}_k} \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 & 3 \\ -x & x-1 & 1 & 2 \\ 0 & -x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{II}_k+\mathrm{III}_k}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 & 3 \\ -x & x & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \xlongequal{\mathrm{I}_k+\mathrm{II}_k} \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 1 & 2 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^4$$

Determinantu n-tog reda izračunajmo matematičkom indukcijom. Tvrdimo $\det(A) = x^n$.

BAZA INDUKCIJE

$n=2$: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -x & x \end{vmatrix} = x^2$ Tvrdnja je tačna za $n=2$.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je tvrdnja tačna za sve brojeve k

od 1 do n tj da je

$$\det(A)=x^k \quad \text{za } \forall \text{ datu } A\in Mat_{k\times k}(\mathbb{R}),\ k=1,2,\dots,n.$$

Na osnovu ove pretpostavke pokažimo da je tvrdnja tačna za n+1.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & n \\ -x & x-1 & -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 \\ 0 & -x & x-1 & \dots & -1 & -1 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x & x \end{vmatrix}}_{\text{determinanta } n+1 \text{ reda}} \quad \underline{\underline{\overline{N-1}_k + \overline{N}_k}}$$

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 & n \\ -x & x-1 & -1 & \dots & -1 & n-2 & n-1 \\ 0 & -x & x-1 & \dots & -1 & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \quad \underline{\underline{\text{razvijamo po zadnjoj vrsti}}}$$

$$= x\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ -x & x-1 & -1 & \dots & -1 & n-2 \\ 0 & -x & x-1 & \dots & -1 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{determinanta } n\text{-tog reda}} \quad \underline{\underline{\text{na osnovu pretpostavke}}} \quad x\cdot x^n = x^{n+1}$$

ZAKLJUČAK

$$\det(A)=x^n$$

(#) Riješiti sistem jednačina i diskutovati rješenja u zavisnosti od parametara a i b:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + a x_5 &= -3 \\ x_1 + 7x_2 + b x_3 + 3x_4 \quad &= -5 \end{aligned}$$

Rj. Sistem ćemo riješiti Kroneker Kapelijevom metodom

$$\overline{A} = [A \,|\, b] = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & a & -3 \\ 1 & 7 & b & 3 & 0 & -5 \end{array}\right] \end{array} \underset{\sim}{III_k \leftrightarrow IV_k} \begin{array}{c} \begin{matrix} & & x_4 & x_3 & & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & a & -3 \\ 1 & 7 & 3 & b & 0 & -5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\underset{\substack{III_v - I_v \cdot 3 \\ IV_v - I_v}}{\overset{II_v - I_v}{\sim}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 10 & 4 & -12 & a-6 & -6 \\ 0 & 10 & 4 & b-5 & -2 & -6 \end{array}\right] \underset{\sim}{\substack{III_v + II_v \cdot (-2) \\ IV_v + II_v \cdot (-2)}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+7 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Odavde vidimo da ćemo imati četiri slučaja u zavisnosti od parametara a i b.

1° $a = 4$, $b = -7$. Tada $\overline{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & x_4 & x_3 & & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow$

$rang(A) = rang(\overline{A}) = 2 < 5 =$ broj nepoznatih

Sistem ima ∞ mnogo rješenja, 3 promjenjive uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 - x_5 &= -3 \end{aligned}$$

$x_3 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$, $s, t, u \in R$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{5}(6s - 2t + u - 3) \Rightarrow x_1 = +3x_2 - 5x_3 + x_4 - 2x_5 + 1.$$

$$x_1 = \frac{18}{5}s - \frac{6}{5}t + \frac{3}{5}u - \frac{9}{5} - 5s + t - 2u + 1$$

$$x_1 = -\frac{7}{5}s - \frac{1}{5}t - \frac{7}{5}u - \frac{4}{5}$$

Rješenje sistema u prvom slučaju je $\left(-\frac{7}{5}s - \frac{1}{5}t - \frac{7}{5}u - \frac{4}{5}, \frac{6}{5}s - \frac{2}{5}t + \frac{1}{5}u - \frac{3}{5}, s, t, u\right)$, $s, t, u \in R$

2° $a \neq 4$, $b = -7$. Tada

$$\overline{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & x_4 & x_3 & x_5 & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array},$$

$rang(A) = rang(\overline{A}) = 3 < 5 =$ broj nepoz.

Sistem ima ∞ mnogo rješ., 2 promj. uz. proiz

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3-x_4+2x_5&=1\\ 5x_2-6x_3+2x_4-x_5&=-3\\ (a-4)x_5&=0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_5=0$$

$$\begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3-x_4&=1\\ 5x_2-6x_3+2x_4&=-3 \end{aligned}$$

$x_3=s$, $x_4=t$ proizvoljne

$$5x_2=6s-2t-3$$

$$x_2=\frac{6}{5}s-\frac{2}{5}t-\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x_1=1+3\left(\frac{6}{5}s-\frac{2}{5}t-\frac{3}{5}\right)-5s+t$$

$$x_1=-\frac{7}{5}s-\frac{1}{5}t-\frac{4}{5}$$

Rješenje sistema je

$$\left(-\frac{7}{5}s-\frac{1}{5}t-\frac{4}{5},\ \frac{6}{5}s-\frac{2}{5}t-\frac{3}{5},\ s,\ t,\ 0\right) \quad s,t\in\mathbb{R}$$

3° $a=4$, $b\neq-7$. Tada

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & x_4 & x_3 & x_5 & \end{array} \\ \overline{A}=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & 2 & 1\\ 0 & 5 & 2 & -6 & -1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & b+7 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3-x_4+2x_5&=1\\ 5x_2-6x_3+2x_4-x_5&=-3\\ (b+7)x_3&=0 \end{aligned}$$

$$x_3=0$$

$$x_4=s, \quad x_5=t$$

$$5x_2=-2s+t-3$$

$$x_2=-\frac{2}{5}s+\frac{1}{5}t-\frac{3}{5}$$

$\text{rang}(A)=\text{rang}(\overline{A})=3<5$

sistem ima ∞ mnogo rješenja

2 promjenjive uzimamo proizvoljno

$$x_1=3\left(-\frac{2}{5}s+\frac{1}{5}t-\frac{3}{5}\right)+s-2t+1$$

$$x_1=-\frac{1}{5}s-\frac{7}{5}t-\frac{4}{5}$$

Rješenje sistema u ovom slučaju je $\left(-\frac{1}{5}s-\frac{7}{5}t-\frac{4}{5},\ -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}t-\frac{3}{5},\ 0,\ s,\ t\right)$ $s,t\in\mathbb{R}$.

4° $a\neq4$, $b\neq-7$. Tada $\text{rang}(A)=\text{rang}(\overline{A})=4<5 \Rightarrow$ sistem ima ∞ mnogo rješenja. Jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

$$\begin{aligned} x_1-3x_2+5x_3-x_4+2x_5&=1\\ 5x_2-6x_3+2x_4-x_5&=-3\\ (b+7)x_3&=0\\ (a-4)x_5&=0 \end{aligned}$$

$$x_3=0, \quad x_5=0, \quad x_4=s$$

$$5x_2=-2s-3 \quad \Rightarrow \quad x_2=-\frac{2}{5}s-\frac{3}{5}$$

$$x_1=3\left(-\frac{2}{5}s-\frac{3}{5}\right)+s+1$$

$$x_1=-\frac{1}{5}s-\frac{4}{5}$$

Rješenje sistema je

$$\left(-\frac{1}{5}s-\frac{4}{5},\ -\frac{2}{5}s-\frac{3}{5},\ 0,\ s,\ 0\right), \quad s\in\mathbb{R}$$

(#) Odrediti t tako da matrica $M=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&2&t\\3&6&-1\end{bmatrix}$ ima svojstvenu vrijednost jednaku 3.
Za dobijeno t odrediti ostale svojstvene vrijednosti matrice M i svojstvene vektore.

Rj. Nenula vektor $\vec{v}$ zovemo svojstveni vektor od M ako je

$$M\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

za neki skalar λ. Skalar λ zovemo svojstvena vrijednost pridružena svojstvenom vektoru $\vec{v}$.

$M\vec{v}=\lambda\vec{v}$

$M\vec{v}-\lambda\vec{v}=0$

$(M-\lambda I)\vec{v}=0$

$$\begin{bmatrix}5-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&t\\3&6&-1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

Ovo je homogeni sistem linearnih jednačina. On ima ∞ mnogo rješenja akko $\det(M-\lambda I)=0$.

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\1&2-\lambda&t\\3&6&-1-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&t\\6&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(5-\lambda)(-2-\underline{2\lambda}+\underline{\lambda}+\lambda^2-6t)=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6t-2)$$

Trebamo naći t takvo da je 3 nula polinoma $\lambda^2-\lambda-6t-2=0$

Za $\lambda=3$: $9-3-6t-2=0$

$-6t+4=0$

$6t=4$

$t=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ tražena vrijednost za t

$-6t-2=-6\cdot\frac{2}{3}-2=-4-2=-6$

$$\det(M-\lambda I)=(5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=(5-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3)$$

Svojstvene vrijednosti matrice M su -2, 3 i 5.

Za $\lambda_1=-2$ imamo $(M+2I)\vec{v}=0$

$$\begin{bmatrix}7&0&0\\1&4&2/3\\3&6&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$7v_1=0$

$v_1+4v_2+\frac{2}{3}v_3=0$

$3v_1+6v_2+v_3=0$

$v_1=0$

$4v_2+\frac{2}{3}v_3=0$ (1)

$6v_2+v_3=0$ (2)

(1)$\cdot 3$: $12v_2+2v_3=0$

(2)$\cdot 2$: $12v_2+2v_3=0$

$v_3=-6v_2$

$\vec{v_1}=\begin{bmatrix}0\\s\\-6s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$ je svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1=-2$

Za $\lambda_2=3$:

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\1&-1&2/3\\3&6&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$2v_1=0$

$v_1-v_2+\frac{2}{3}v_3=0$ $/\cdot 6$

$3v_1+6v_2-4v_3=0$

$v_1=0$

$-6v_2+4v_3=0$

$6v_2-4v_3=0$

$6v_2=4v_3$

$v_2=\frac{4}{6}v_3=\frac{2}{3}v_3$

$\vec{v_2}=\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{3}s\\s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$, svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2=3$

Za $\lambda_3=5$:

$v_1-3v_2+\frac{2}{3}v_3=0$ $/\cdot 3$

$3v_1+6v_2-6v_3=0$

$3v_1-9v_2+2v_3=0$

$3v_1+6v_2-6v_3=0$ $-$

$-15v_2+8v_3=0$

$v_2=\frac{8}{15}v_3$

$3v_1-\cancel{9}^{3}\cdot\frac{8}{\cancel{15}_{5}}v_3+2v_3=0$

$3v_1=\frac{14}{5}v_3$

$v_1=\frac{14}{15}v_3$

$\vec{v_3}=\begin{bmatrix}\frac{14}{15}s\\\frac{8}{15}s\\s\end{bmatrix}$, $s\neq 0$, svojstveni vektor koji odgovara λ_3